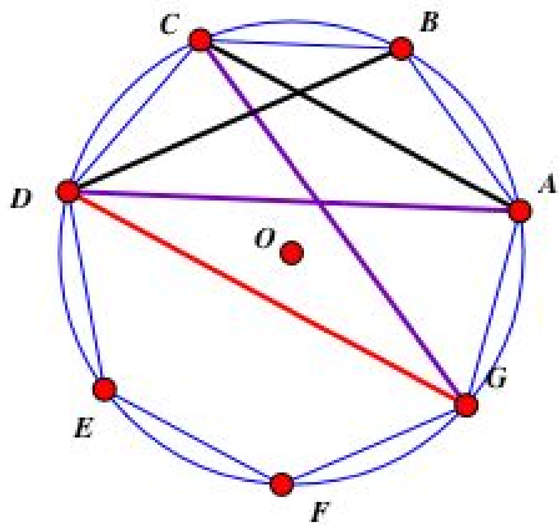
Problema com sete lados

Provamos que num heptágono regular $[ABCDEFG]$ de lado 1,

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = 1$$

.

Seja o heptágono regular $[ABCDEFG]$ da figura



Como sabemos $\overline{AB} = \overline{BC} = \cdots = \overline{GA} = 1$ e $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \cdots = \angle GBA$ e, em consequência $\Delta[ABC] = \Delta[BCD]$ e $\overline{AC} = \overline{BD}$. Mais: $\overline{AD} = \overline{CG}$, por serem diagonais de um trapézio isósceles ou $\overline{AD} = \overline{DG}$, por serem cordas correspondentes a arcos iguais ($\frac{6\pi}{7}$)

O teorema de Ptolomeu, aplicado ao quadrilátero $[ABCD]$, dá

$$\overline{AB}^2 + \overline{AD}.\overline{AB} = \overline{AC}^2, \quad \text{no caso,} \quad 1 + \overline{AD} = \overline{AC}^2 \tag{1}$$

E aplicado ao quadrilátero $[ACDG]$, dará

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}.\overline{DG} = \overline{AD}^2, \quad \text{no caso,} \quad 1 + \overline{AC}.\overline{DG} = \overline{AD}^2, \quad \text{ou} \quad 1 + \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AD}^2 \tag{2}$$

Esta última igualdade (2) e a primeira (1) permitem escrever

$$\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AD}^2 - 1 = (\overline{AD} - 1)(\overline{AD} + 1) = (\overline{AD} - 1).\overline{AC}^2 \tag{3}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{AC}.\overline{AD} &= (\overline{AD} - 1).\overline{AC}^2 \\ \overline{AD} &= (\overline{AD} - 1).\overline{AC} \\ \overline{AD} &= \overline{AD}.\overline{AC} - \overline{AC} \\ \overline{AD} + \overline{AC} &= \overline{AD}.\overline{AC} \end{aligned} \tag{4}$$

Dividindo por $\overline{AC}.\overline{AD}$ ambos os termos desta última igualdade, obtemos o resultado que procurávamos.

$$\frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} = 1$$

■