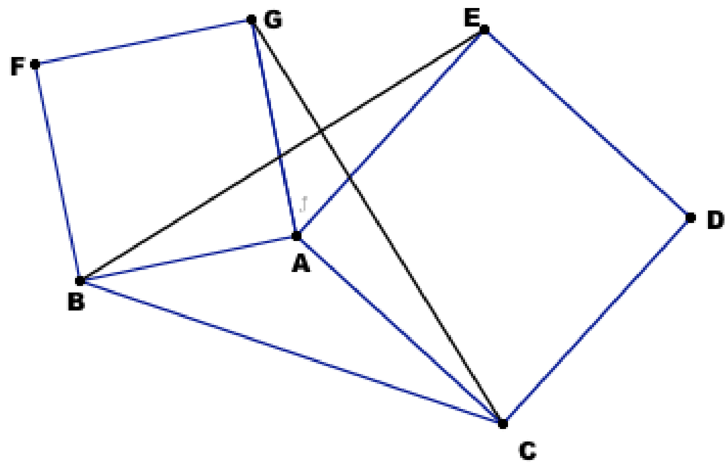
Operações com vectores

Um exercício escolar

Considere um triângulo $[ABC]$. Sobre o lado $[AB]$ construa-se um quadrado $[ABFG]$ exterior ao triângulo e sobre o lado $[AC]$ construa-se o quadrado $[ACDE]$ também exterior a $[ABC]$.



Utilizando o produto escalar $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{CG}$, mostre que as rectas EB e CG são ortogonais.

Sabemos que

$$\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GC} = \overline{EB} \times \overline{GC}.\cos(G\hat{H}E) \tag{1}$$

$$EB \perp GC \iff \angle(G\hat{H}E) = 0 \iff \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GC} = 0 \tag{2}$$

designando H o ponto de intersecção de BE com CG. Como

$$\overrightarrow{EB} \approx \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC} \tag{4}$$

e o produto escalar de vectores é distributivo relativamente à adição de vectores,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GC} &= (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \end{aligned} \tag{5}$$

já que, por serem perpendiculares,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AC} &= 0 \\ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{GA} &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Por ser $\angle B\hat{A}G = \angle C\hat{A}E = \frac{\pi}{2}$, $\angle B\hat{A}C = \pi - \angle G\hat{A}E$ e, finalmente, $\cos(\angle B\hat{A}C) = -\cos(\angle G\hat{A}E)$, pelo que, retomando (5)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \\ &= \overline{EA} \times \overline{GA} \times \cos(\angle E\hat{A}G) + \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos(\angle B\hat{A}C) \\ &= \overline{AC} \times \overline{AB} - \overline{AB} \times \overline{AC} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

por ser $\overline{AE} = \overline{AC}$ e $\overline{AG} = \overline{AB}$.

Concluindo: Como $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{GC} = 0$, é $BE \perp CG$. ■